Über projektive Veränderung der Übertragung in Linienelementmannigfaltigkeiten

Von ARTHUR MOÓR in Szeged

Herrn Professor Béla Sz.-Nagy zum 50 Geburtstage gewidmet

§ 1. Einleitung

Das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+2G^i\left(x, \frac{dx}{ds}\right)=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{1. 1}$$

wo die Größen $G^i(x, x')$ in den $x'^i \equiv \frac{dx^i}{ds}$ homogen von zweiter Dimension sind, bestimmt eine Geometrie der Bahnen, deren projektive und affine Eigenschaften schon vielfaltig untersucht wurden; wir erwähnen nur die grundlegende Arbeit [1] von L. BERWALD, wo man auch weitere Literaturangaben findet.

Die Geometrie $\mathfrak{G}_n$ der durch (1. 1) definierten Bahnen ist durch die Grundgrößen $G^i(x, x')$ bestimmt; man kann aber $\mathfrak{G}_n$ auch mit Finslerräumen $\mathfrak{F}_n$ in Zusammenhang bringen, falls man bedingt, daß die Gleichung (1. 1) eben die Extremalen einer Finslerschen Geometrie $\mathfrak{F}_n$ bestimmt.

Eine projektive Veränderung der Grundgrößen ist durch die Formeln

$$\hat{G}^i(x, x') = G^i(x, x')+\psi(x, x')x'^i, \qquad x'^i \equiv \frac{dx^i}{ds} \tag{1. 2}$$

angegeben[1]), wo $\psi(x, x')$ eine in den x'^i von erster Dimension homogene skalare Funktion der Veränderlichen (x^i, x'^i) ist. Im folgenden wollen wir nun für die skalare Funktion $\psi(x, x')$ diejenigen Bedingungen bestimmen, die notwendig und hinreichend dafür sind, daß nach der projektiven Veränderung (1. 2) der Grundgrößen G^i, die Krümmungstensoren des Raumes unverändert bleiben, bzw. daß der Basisraum $\mathfrak{G}_n$ in einen sog. affin-skalaren Raum übergehe.

Der affin-skalare Raum ist ein spezieller Typ der metrisch-affinen Räume. Ein *metrisch-affiner Raum* ist ein n-dimensionaler Linienelementraum bezogen auf ein lokales Koordinatensystem, in dem die Metrik durch einen metrischen Grundtensor $g_{ik}(x, \dot{x})$ festgelegt ist und in dem eine kovariante Ableitung der Vektoren

[1]) In der Arbeit [1] ist $\psi(x, x')$ durch $-P(x, x')$ bezeichnet.

definiert ist. Der metrisch-affine Raum ist ein *affin-skalarer Raum,* falls sein Krümmungstensor eine gewisse spezielle Form hat (vgl. unsere Formeln (3. 1)—(3. 3)), die in die charakteristische Form der Finslerräume von skalarer Krümmung übergeht, falls die Übertragungsparameter mit den Cartanschen Übertragungsparametern eines Finslerraumes von skalarer Krümmung übereinstimmen. *Diese Räume sind also Verallgemeinerungen der Finslerräume von skalarer Krümmung* (vgl. [4], Definition 2 auf Seite 159 und § 4); bezüglich weiterer geometrischer Eigenschaften dieser Räume verweisen wir auf die Sätze 5—7 von [4].

§ 2. Projektive Veränderung der Übertragung

Wir führen die folgenden — auch von L. Berwald benützten — Bezeichnungen ein (vgl. [1] Formeln (1. 4)):

$$G^i_j \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial G^i(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^j}, \quad G^i_{jk} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 G^i(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k}, \quad G^i_{jkl} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^3 G^i(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^l}.$$

Diese Größen sind Funktionen des Linienelementes $(x, \dot{x})$. Die Ableitung $\frac{dx^i}{ds}$ nach dem affinen Parameter s wird mit x'^i bezeichnet. Die Größen G^i sind in den $\dot{x}^i$ homogen von zweiter Dimension; dementsprechend sind G^i_j, G^i_{jk} bzw. G^i_{jkl} in den $\dot{x}^i$ homogen von erster, nullter, bzw. (-1)-ter Dimension.

Die wichstigsten Krümmungstensoren des Raumes $\mathfrak{G}_n$ sind die folgenden (vgl. [1] § 2):

$$K^i_j \overset{\text{def}}{=} 2\frac{\partial G^i}{\partial x^j} - \frac{\partial G^i_j}{\partial x^r}\dot{x}^r + 2G^i_{jr}G^r - G^i_r G^r_j \tag{2. 1}$$

ist der *affine Abweichungstensor,*

$$K^i{}_{jk} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{3}\left(\frac{\partial K^i{}_k}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial K^i{}_j}{\partial \dot{x}^k}\right) \equiv \frac{\partial G^i_j}{\partial x^k} - \frac{\partial G^i_k}{\partial x^j} + G^r_j G^i{}_{rk} - G^r_k G^i{}_{rj} \tag{2. 2}$$

ist der *Grundtensor der affinen Krümmung* und

$$K^i_{hjk} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial K^i{}_{jk}}{\partial \dot{x}^h} \tag{2. 3}$$

ist der *affine Krümmungstensor.*

Die Transformationsformel von G^i_{jk} stimmt mit der Transformationsformel der gewöhnlichen affinen Übertragungsparameter überein, somit ist die von L. Berwald eigeführte Operation:

$$\xi^i{}_{,k} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi^i}{\partial \dot{x}^r} G^r_k + G^i{}_{rk}\xi^r$$

eine kovariante Ableitung des kontravarianten Vektors ξ^i; diese Operation kann in der gewöhnlichen Weise auf beliebige Tensoren erweitert werden (vgl. [1] § 3)[2]).

[2]) In [1] ist diese Operation durch ein Semikolon bezeichnet.

Für einen Skalar $S(x, \dot{x})$ lautet die Berwaldsche kovariante Ableitung:

$$S_{,k} = \frac{\partial S}{\partial x^k} - \frac{\partial S}{\partial \dot{x}^r} G_k^r.$$

Die Krümmungstensoren $K^i{}_j$ und $K^i{}_{jk}$ verändern sich nach einer projektiven Veränderung (1. 2) der Grundgrößen G^i gemäß den Formeln:

(2. 4) $$\hat{K}^i{}_j = K^i{}_j + 2\psi_{,j}\dot{x}^i - \psi_{j,t}\dot{x}^t\dot{x}^i - \psi\psi_j\dot{x}^i + \delta^i_j(\psi^2 - \psi_{,t}\dot{x}^t)$$

und

(2. 5) $$\hat{K}^i{}_{jk} = K^i{}_{jk} - \{\delta^i_k(\psi_{,j} - \psi\psi_j) - \delta^i_j(\psi_{;k} - \psi\psi_k) + (\psi_{k,j} - \psi_{j,k})\dot{x}^i\},$$

wo $$\psi_j \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \psi}{\partial \dot{x}^j}, \quad \psi_{j,k} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \psi_j}{\partial x^k} - \frac{\partial \psi_j}{\partial \dot{x}^r} G_k^r - G^r_{jk}\psi_r$$

bedeuten. Die Formeln (2. 4) und (2. 5) erhält man leicht aus (2. 1) und (2. 2), wenn man diese Formeln statt G^i mit den durch (1. 2) angegebenen $\hat{G}^i$ aufschreibt (vgl. [1] Gleichungen (5. 3), (7. 3) und (7. 4)).

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir den folgenden

Satz 1. *Für die Relationen*

(2. 6) $$\hat{K}^i{}_j = K^i{}_j$$

bzw.

(2. 7) $$\hat{K}^i{}_{jk} = K^i{}_{jk} \qquad (n > 2)$$

ist die Relation

(2. 8) $$\psi_{,j} - \psi\psi_j = 0 \qquad \left(\psi_j \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \psi}{\partial \dot{x}^j}\right)$$

notwendig und hinreichend.

Beweis. Wir beweisen zuerst, daß aus der Relation (2. 6) die Relation (2. 8) folgt. Die Relation (2. 6) ist nach der Formel (2. 4) mit

(2. 9) $$(2\psi_{,j} - \psi_{j,t}\dot{x}^t - \psi\psi_j)\dot{x}^i + \delta^i_j(\psi^2 - \psi_{,t}\dot{x}^t) = 0$$

gleichwertig. Eine Verjüngung über die Indizes i, j gibt wegen der aus den Homogenitätseigenschaften von ψ und G^i folgenden Identität

$$\psi_{j,k}\dot{x}^j\dot{x}^k = \psi_{,k}\dot{x}^k$$

und $\psi_t\dot{x}^t = \psi$ unter Beachtung der Ungleichung $n \neq 1$

(2. 10) $$\psi^2 - \psi_{,t}\dot{x}^t = 0.$$

Nun ist

(2. 11) $$\psi_{k,j} \equiv \frac{\partial \psi_{,j}}{\partial \dot{x}^k}$$

eine Identität, wie das durch eine unmittelbare Rechnung sofort bestätigt werden kann. Eine partielle Ableitung von (2. 10) nach $\dot{x}^j$ gibt wegen der Identität (2. 11):

$$2\psi\psi_j - \psi_{,j} - \psi_{j,t}\dot{x}^t = 0. \tag{2.12}$$

Auf Grund von (2. 10) und (2. 12) bekommt man aus (2. 9) durch Elimination von $\psi_{j,t}\dot{x}^t$ die Formel $\dot{x}^i(\psi_{,j} - \psi\psi_j) = 0$, woraus wegen $\dot{x}^i \neq 0$ die zu beweisende Relation (2. 8) unmittelbar folgt.

Die Relation (2. 8) ist also für die Relation (2. 6) notwendig. Wir beweisen jetzt, daß sie auch hinreichend ist. Nehmen wir also an, daß die Relation (2. 8) gilt. Wir zeigen, daß dann auch (2. 6) gelten wird.

Aus (2. 8) folgt offenbar nach einer Überschiebung mit $\dot{x}^j$ wegen der Homogenität von erster Dimension von ψ in den $\dot{x}^i$ die Relation (2. 10). Aus (2. 10) erhält man ebenso wie vorher, durch partielle Ableitung nach $\dot{x}^j$, die Relation (2. 12).

Auf Grund der Formeln (2. 8), (2. 10) und (2. 12) folgt aber, daß die Relation (2. 9) gültig ist, man muß nur aus (2. 9) die Größen $\psi_{j,t}\dot{x}^t$ mit Hilfe von (2. 12) und dann $\psi_{,j}$ mit Hilfe von (2. 8) eliminieren. (2. 9) ist aber schon auf Grund von (2. 4) mit der zu beweisenden Relation (2. 6) gleichwertig.

Wir gehen jetzt zum Beweis des zweiten Teiles des Satzes über und zeigen, daß (2. 8) auch für das Bestehen von (2. 7) notwendig und hinreichend ist.

Aus (2. 5) und (2. 7) folgt:

$$\delta^i_k(\psi_{,j} - \psi\psi_j) - \delta^i_j(\psi_{,k} - \psi\psi_k) + (\psi_{k,j} - \psi_{j,k})\dot{x}^i = 0. \tag{2.13}$$

Nach einer Verjüngung über i, k wird:

$$(n-1)(\psi_{,j} - \psi\psi_j) + (\psi_{t,j} - \psi_{j,t})\dot{x}^t = 0 \tag{2.14}$$

und nach einer neuen Überschiebung mit $\dot{x}^j$:

$$(\psi_{,t} - \psi\psi_t)\dot{x}^t = 0. \tag{2.15}$$

Da $\dot{x}^i \neq 0$ für einen beliebigen Index i bedingt werden kann, erhält man aus der Gleichung (2. 13) nach einer Überschiebung mit $\dot{x}^k$ in Hinsicht auf die Relation (2. 15):

$$\psi_{,j} - \psi\psi_j + (\psi_{t,j} - \psi_{j,t})\dot{x}^t = 0. \tag{2.16}$$

Eliminiert man nun aus dieser Gleichung den Ausdruck $(\psi_{t,j} - \psi_{j,t})\dot{x}^t$ mit Hilfe der Formel (2. 14), so erhält man wegen der Bedingung $n > 2$ (vgl. unsere Formel (2. 7)) die zu beweisende Relation (2. 8).

Wir müssen noch zeigen, daß aus (2. 8) die Relation (2. 7) folgt. Substituieren wir $\psi_{,j}$ aus (2. 8) in die Identität (2. 11), so wird aus der Formel (2. 11):

$$\psi_{k,j} = \psi_j\psi_k + \psi_{jk}, \qquad \psi_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2\psi}{\partial\dot{x}^j\partial\dot{x}^k}. \tag{2.17}$$

Aus (2. 8) und (2. 17) folgt schon, daß die Relation (2. 13) gültig ist; aus (2. 13) und (2. 5) folgt aber die Relation (2. 7). Der Satz 1 ist also vollständig bewiesen.

Die Relation (2. 8) verallgemeinert den Fall der affinzusammenhängenden Punkträume (vgl. [3] § 32). Ist der Skalar ψ in den $\dot{x}^i$ linear, d. h. ist ψ von der Form

$$\psi(x, \dot{x}) = \varphi_t(x)\dot{x}^t \tag{2.18}$$

und sind die Übertragungsparameter G^j_{ik} nur von x^k abhängig, von $\dot{x}^i$ aber unabhängig, so bekommt man aus (2. 8) wegen (2. 18) und wegen $G^s_{tj}\dot{x}^t \equiv G^s_j$:

$$(\varphi_{t,j} - \varphi_t \varphi_j)\dot{x}^t = 0; \tag{2. 19}$$

da aber nach den gestellten Bedingungen φ_j und $\varphi_{t,j}$ von den $\dot{x}^k$ unabhängig sind und (2. 19) für jede Richtung $\dot{x}^i$ besteht, folgt aus (2. 19) die Relation

$$\varphi_{t,j} - \varphi_t \varphi_j = 0,$$

und das stimmt mit dem Fall der Punkträume überein (vgl. [3], Formel (32. 17)).

§ 3. Affin-skalare Räume

Wir nehmen jetzt an, daß unser Raum $\mathfrak{G}_n$ ein Finslerraum $\mathfrak{F}_n$ ist. Das bedeutet, daß im Raume eine metrische Fundamentalfunktion $F(x, \dot{x})$ existiert[3]), die durch die Formeln

$$g_{ij} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}$$

einen metrischen Grundtensor definiert, und daß die Grundgrößen durch die Formeln

$$G^i = \frac{1}{2} \Gamma^{*i}_{j\,k} \dot{x}^j \dot{x}^k$$

bestimmt sind, wo $\Gamma^{*i}_{j\,k}(x, \dot{x})$ die wohlbekannten Cartanschen Übertragungsparameter des Finslerraumes $\mathfrak{F}_n$ bedeuten (vgl. [2]).

Nach der projektiven Veränderung (1. 2) von G^i bekommt man einen metrisch-affinen Raum $\hat{\mathfrak{B}}_n$, der ein affin-skalarer Raum von erster, zweiter, dritter Art ist, je nach dem sein Krümmungstensor die Form

$$\hat{K}^i{}_j = KF^2(\hat{\gamma}^i{}_j \hat{\gamma}_{oo} - \hat{\gamma}^i{}_o \hat{\gamma}_{oj}), \tag{3. 1}$$

$$\text{(a)}\quad \hat{K}^i{}_j = KF^2(\hat{\gamma}^i{}_j - \hat{\gamma}^i{}_o l_j), \qquad \text{(b)}\quad \hat{K}^i{}_j = KF^2(\delta^i_j \hat{\gamma}_{oo} - l^i \hat{\gamma}_{oj}), \tag{3. 2}$$

bzw.

$$\hat{K}^i{}_j = KF^2(\delta^i_j - l^i l_j) \tag{3. 3}$$

hat, wo K einen Skalar — möglicherweise ist $K \equiv 1$ — und $\hat{\gamma}^i{}_j$ einen von ψ und g_{ij}, l^i bzw. von den kovarianten Ableitungen dieser Größen gebildeten gemischten Tensor bedeuten. Die Abhängigkeit von $\hat{\gamma}^i{}_j$ von den erwähnten Grundgrößen des Raumes ist in den einzelnen Fällen verschieden, die Formeln (3. 1)—(3. 3) drücken aber aus, daß der Tensor $\hat{K}^i{}_j$ der affin-skalaren Räume eine sehr spezielle Form haben muß, die ermöglicht, daß mehrere geometrischen Eigenschaften der Finslerräume skalarer Krümmung auch in diesen Räumen gültig seien (vgl. [4] § 4). Der

[3]) Die gewöhnlichen Eigenschaften von $F(x, \dot{x})$ sind B. z. in der Einleitung von [4] angegeben.

Index: o bedeutet — wie gewöhnlich — die Überschiebung mit dem Einheitsvektor

$$l^i \overset{\text{def}}{=} \frac{\dot{x}^i}{F}, \quad \text{bzw.} \quad l_i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}$$

des Finslerraumes.

Wir werden jetzt notwendige und hinreichende Bedingungen bestimmen dafür, daß der $\hat{\mathfrak{V}}_n$-Raum ein affin-skalarer Raum sei:

Satz 2. *Damit $\hat{K}^i{}_j$ die Form* (3. 2) (*b*) *hat, ist notwendig und hinreichend, daß $K^i{}_j$ ebenfalls die Form* (3. 2) (*b*) *habe.*

Beweis. Die Formel (2. 4) schreiben wir in der Form:

$$(3.\,4) \qquad \hat{K}^i{}_j = K^i{}_j + F^2\{\delta^i_j(\psi_t\psi_r - \psi_{t,r})l^t l^r - l^i(-2\psi_{t,j} + \psi_{j,t} + \psi_t\psi_j)l^t\}.$$

Offenbar ist (3. 4) mit (2. 4) vollständig identisch, da wegen der Homogenität von erster Dimension: $\psi_t \dot{x}^t = \psi$ besteht und $l^i{}_{,k} = 0$ ist. Mit der Bezeichnung

$$(3.\,5) \qquad \gamma^*_{tj} \overset{\text{def}}{=} -2\psi_{t,j} + \psi_{j,t} + \psi_t\psi_j$$

geht die Formel (3. 4) in

$$(3.\,6) \qquad \hat{K}^i{}_j = K^i{}_j + F^2(\delta^i_j \gamma^*_{oo} - l^i \gamma^*_{oj})$$

über. Hat nun $\hat{K}^i{}_j$ die Form (3. 2) (*b*), so besteht für $K^i{}_j$ nach (3. 6) die Formel:

$$K^i{}_j = F^2(\delta^i_j \gamma_{oo} - l^i \gamma_{oj}) \quad \text{mit} \quad \gamma_{oj} \overset{\text{def}}{=} K\hat{\gamma}_{oj} - \gamma^*_{oj}.$$

Damit haben wir die Notwendigkeit bewiesen.

Wir nehmen jetzt an, daß $K^i{}_j$ die Form

$$K^i{}_j = K^* F^2(\delta^i_j \gamma_{oo} - l^i \gamma_{oj})$$

hat. Offenbar wird dann $\hat{K}^i{}_j$ nach (3. 6) die Form (3. 2) (*b*) haben, wo jetzt

$$\hat{\gamma}_{km} = K^* \gamma_{km} + \gamma^*_{km} \qquad (K \equiv 1)$$

bedeuten wird. Damit haben wir also den Satz 2 vollständig bewiesen.

Mit Hilfe der Formeln (3. 5) und (3. 6) kann auch der folgende Satz leicht bewiesen werden:

Satz 3. *Notwendig und hinreichend dafür, daß $\hat{K}^i{}_j$ die Form* (3. 3) *habe, sind die folgenden Relationen:*

$$(3.\,7a) \qquad \gamma^*_{oj} = l_j\left(K - \frac{B}{F^2}\right),$$

$$(3.\,7b) \qquad K^i{}_j = B(\delta^i_j - l^i l_j),$$

wo B den Skalar

$$(3.\,7c) \qquad B \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n-1} K^t{}_t$$

bedeutet und γ^*_{ij} durch (3. 5) *definiert ist.*

Beweis. Substituiert man γ^*_{oj} und $K^i{}_j$ aus den Formeln (3. 7*a*) und (3. 7*b*) in die Formel (3. 6), so bekommt man für $\hat{K}^i{}_j$ eben die Form (3. 3). Die Bedingungen (3. 7*a*) und (3. 7*b*) sind also hinreichend.

Um die Notwendigkeit der Formeln (3. 7*a*) und (3. 7*b*) zu beweisen, nehmen wir jetzt an, daß $\hat{K}^i{}_j$ die Form (3. 3) hat. Aus (3. 6) und (3. 3) folgt dann:

$$K^i{}_j + F^2(\delta^i_j \gamma^*_{oo} - l^i \gamma^*_{oj}) = KF^2(\delta^i_j - l^i l_j). \tag{3. 8}$$

In diesem Paragraphen haben wir vorausgesetzt, daß der Basisraum ein Finslerraum ist. Im Finslerschen Fall ist aber

$$K^i{}_j \equiv F^2 R_o{}^i{}_{oj},$$

wo $R_o{}^i{}_{oj}$ der kontrahierte Krümmungstensor des Finslerraumes ist (vgl. [2], § 38). In diesem Falle ist aber wegen $R_{(ki)mj}=0$ (vgl. [2], § 38) auch

$$K_{oj} \equiv F^2 R_{oooj} = 0\ ^{4)}.$$

Eine Überschiebung der Relation (3. 8) mit l_i ergibt somit:

$$l_j \gamma^*_{oo} - \gamma^*_{oj} = 0. \tag{3. 9}$$

Eine Verjüngung von (3. 8) über den Indexen i, j ergibt:

$$K^t{}_t + F^2(n-1)\gamma^*_{oo} = KF^2(n-1).$$

Nach der Bezeichnung (3. 7*c*) bekommt man aus unserer letzten Gleichung:

$$\gamma^*_{oo} = K - \frac{B}{F^2}.$$

Setzen wir nun diesen Wert von γ^*_{oo} in die Gleichung (3. 9) ein, lösen wir dann (3. 9) bezüglich γ^*_{oj}, so erhalten wir eben die Formel (3. 7*a*). Eliminieren wir nun γ^*_{oj} und γ^*_{oo} mit Hilfe von (3. 7*a*) aus der Gleichung (3. 8), so bekommen wir für $K^i{}_j$ die Formel (3. 7*b*). Damit ist der Satz 3 vollständig bewiesen.

Die projektive Veränderung (1. 2) verändert auch die Berwaldschen Übertragungsparameter G^i_{jk}. Es wird:

$$\hat{G}^i_{jk} = G^i_{jk} + \psi_{jk}\dot{x}^i + \psi_j \delta^i_k + \psi_k \delta^i_j, \quad \psi_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \psi_j}{\partial \dot{x}^k} \equiv \frac{\partial^2 \psi}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k}. \tag{3. 10}$$

Definieren wir nun ein invariantes Differential mit den Übertragungsparametern $\hat{G}^i_{jk}$ durch die Formeln

$$\hat{D}\xi^i = d\xi^i + \hat{G}^i_{jk}\xi^j dx^k + A_j{}^i{}_k \xi^j \hat{\omega}^k(d),$$

wo $A_j{}^i{}_k$ den Torsionstensor des Finslerraumes $\mathfrak{F}_n$ und

$$\hat{\omega}^k(d) \stackrel{\text{def}}{=} dl^k + \hat{G}^k_{ot} dx^t \equiv \hat{D}l^k$$

bedeuten, so bekommen wir einen von uns in der Arbeit [4[als affinen Finslerraum

[4]) Offenbar ist $K^o{}_j \equiv K_{ij} g^{ir} l_r \equiv K_{ij} l^i \equiv K_{oj}$.

bezeichneten Raum: $\hat{\mathfrak{A}}_n$ (vgl. [4] Definition 1 auf S. 159; statt „*" bezeichnen wir jetzt und im folgenden die Größen unseres Raumes mit „$\wedge$").

Die Hyperflächen des Raumes $\hat{\mathfrak{A}}_n$ betrachten wir als die Mannigfaltigkeit der tangentialen Linienelemente, d. h. die Grundgleichungen einer Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$ sind durch

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}), \quad \dot{x}^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \dot{u}^\alpha$$

angegeben, wo über α von 1 bis $(n-1)$ summiert werden soll und $(u^\alpha, \dot{u}^\alpha)$ ein Linienelement der Hyperfläche bedeutet. Das invariante Differential $\hat{D}$ induziert durch Projektion ein invariantes Differential für die Hyperfläche $\mathfrak{H}_{n-1}$. Die zum invarianten Differential $\hat{D}$ gehörigen autoparallelen Kurven sind im allgemeinen von den autoparallelen Linien des induzierten invarianten Differentials von $\mathfrak{H}_{n-1}$ verschieden. Sind aber die autoparallelen Linien von $\mathfrak{H}_{n-1}$ gleichzeitig autoparallele Kurven des Raumes, so nennt man $\mathfrak{H}_{n-1}$ eine *autoparallele Hyperfläche erster Art* (vgl. [4] § 7, insbesondere Definition 5). Mit Hilfe der autoparallelen Hyperflächen erster Art kann man die $\hat{\mathfrak{A}}_n$-Räume von skalarer Krümmung vierter Art definieren. Nach der Definition ist der Raum $\hat{\mathfrak{A}}_n$ ein Raum von *skalarer Krümmung vierter Art,* falls in jedem Punkte eine autoparallele Hyperfläche erster Art A_{n-1} existiert, und für den Normalenvektor von A_{n-1} jede Richtung möglich ist (vgl. [4] § 8, insbesondere die Definition 6 auf S. 183).

Die Forderung, daß der Raum ein $\hat{\mathfrak{A}}_n$-Raum von skalarer Krümmung vierter Art sei, führt zu einer Reihe der Bedingungsgleichungen für die Krümmungstensoren. Sie bestimmen die analytischen Bedingungen dafür, daß der $\mathfrak{A}_n$-Raum ein Raum von skalarer Krümmung vierter Art sei (vgl. [4] Formeln (8. 3)). Wir wollen im folgenden die mögliche Form der Krümmungstensoren $\hat{K}^i{}_j$ und $\hat{G}^i_{jkl}$ der $\hat{\mathfrak{A}}_n$-Räume von skalarer Krümmung vierter Art zu bestimmen.

Im Beweis des Satzes 9 unserer Arbeit [4] bemerkten wir, daß der Tensor $\hat{G}^i{}_{jkl}$ ähnliche Eigenschaften hat, wie der Tensor $G^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ in den Untersuchungen von A. Rapcsák (vgl. [5], Hauptsatz I auf S. 12). Die Ursache hiervon ist die folgende: Ist der Raum $\mathfrak{A}_n$ ein Finslerraum $\mathfrak{F}_n$, so stimmen die autoparallelen und die geodätischen Kurven des Raumes überein, und die Fläche A_{n-1} geht in eine Hyperebene erster Art über. Die Finslerräume, in denen A_{n-1}-Flächen in jedem Punkt und zu jeder Richtung existieren, sind von skalarer Krümmung vierter Art. In unseren Räumen $\hat{\mathfrak{A}}_n$ hat nur $\hat{K}_o{}^i{}_{ok}$ einen anderen Charakter als in den Räumen $\mathfrak{F}_n$. Es muß also, falls unser Raum $\hat{\mathfrak{A}}_n$ ein Raum von skalarer Krümmung vierter Art ist, $\hat{G}^i{}_{jkl}$ die Form:

$$\hat{G}^i_{jkl} = \dot{x}^i \varphi_{jkl} + \varphi_{jk}\delta^i_l + \varphi_{jl}\delta^i_k + \varphi_{kl}\delta^i_l \tag{3.11}$$

und $\hat{K}_o{}^i{}_{ok}$ nach der Formel (8. 6) von [4] die Form:

$$\hat{K}_o{}^i{}_{ok} = A_k l^i + \delta^i_k B \tag{3.12}$$

haben, wobei φ_{ij}, φ_{ijk} solche symmetrische Tensoren bedeuten, die von den Grundgrößen des Raumes gebildet sind, während A_k und B einen Vektor bzw. einen Skalar bedeuten. Es ist dabei $\hat{K}_h{}^i{}_{jk}$ das Analogon des Tensors (2. 3), d. h.

$$\hat{K}_h{}^i{}_{jk} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \hat{K}^i{}_{jk}}{\partial \dot{x}^h}, \tag{3. 13}$$

wo $\hat{K}^i{}_{jk}$ durch (2. 5) angegeben ist.

Bemerkung. Die Tensoren $\hat{K}^i{}_j$, $\hat{K}^i{}_{jk}$ und $\hat{K}_h{}^i{}_{jk}$ erhält man, wenn man in die Formeln (2. 1)—(2. 3) statt G^i die Größen $\hat{G}^i$ schreibt.—

Aus (3. 13) folgt wegen der Homogenitätseigenschaften von $\hat{K}^i{}_j$ und $\hat{K}^i{}_{jk}$, daß

$$\hat{K}_o{}^i{}_{ok} = \frac{1}{F^2}\hat{K}^i{}_k \tag{3. 14}$$

ist. Aus (3. 12) und (3. 14) folgt somit, daß in einem Raum von skalarer Krümmung vierter Art $\hat{K}^i{}_k$ die Form

$$\hat{K}^i{}_k = \delta^i_k \hat{Q} + l^i \hat{P}_k \tag{3. 15}$$

haben muß, wobei $\hat{Q}$ einen Skalar und $\hat{P}_k$ einen kovarianten Vektor bedeuten: $\hat{Q} = F^2 B$, $\hat{P}_k = F A_k$.

Satz 4. *$\hat{K}^i{}_j$ und $\hat{G}^i{}_{hjk}$ bestimmen dann und nur dann einen affinen Finslerraum von skalarer Krümmung vierter Art, falls auch $K^i{}_j$ und $G^i{}_{hjk}$ einen solchen Raum bestimmen.*

Beweis. Aus (3. 10) folgt:

$$\hat{G}^i_{jkl} = G^i_{jkl} + \dot{x}^i \psi_{jkl} + \psi_{jk}\delta^i_l + \psi_{jl}\delta^i_k + \psi_{kl}\delta^i_j, \tag{3. 16}$$

mit

$$\psi_{jkl} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^3 \psi}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^l}, \quad \psi_{jk} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k}.$$

Vergleicht man (3. 11) und (3. 16), so sieht man unmittelbar, daß G^i_{jkl} die Form

$$G^i_{jkl} = \dot{x}^i \Phi_{jkl} + \Phi_{jk}\delta^i_l + \Phi_{jl}\delta^i_k + \Phi_{kl}\delta^i_l \tag{3. 17}$$

haben muß, wo Φ_{jkl} und Φ_{jk} symmetrische Tensoren bedeuten und umgekehrt: aus (3. 17) folgt (3. 11). Es ist

$$\Phi_{jk} \overset{\text{def}}{=} \varphi_{jk} - \psi_{jk}, \quad \Phi_{jkl} \overset{\text{def}}{=} \varphi_{jkl} - \psi_{jkl}.$$

Ebenso folgt aus (3. 6) und (3. 15), daß $K^i{}_j$ die Form

$$K^i{}_j = \delta^i_j Q + l^i P_j \tag{3. 18}$$

hat, wo Q einen Skalar und P_j einen kovarianten Vektor bedeuten, und offenbar folgt aus (3. 18) und (3. 6) für $\hat{K}^i{}_j$ eine Form von (3. 15). Damit haben wir den Satz 4 vollständig bewiesen: es ist $Q = \hat{Q} - F^2\gamma^*_{oo}$, $P_j = \hat{P}_j - F^2\gamma^*_{oj}$.

Literatur

[1] L. BERWALD, Über Finslersche und Cartansche Geometrie. IV, *Annals of Math.*, **48** (1947), 755–781.
[2] E. CARTAN, *Les espaces de Finsler* (Actualités sci. et ind., **79**, Paris, 1934).
[3] L. P. EISENHART, *Non-Riemannian Geometry* (Amer. Math. Soc. Coll. Publ., VIII, New York, 1927).
[4] A. MOÓR, Über affine Finslerräume von skalarer Krümmung, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 157–189.
[5] A. RAPCSÁK, Eine neue Charakterisierung Finslerscher Räume skalarer und konstanter Krümmung und projektiv ebene Räume, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **8** (1957), 1–18.

(Eingegangen am 10. September 1962)